BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VII-a

1. a) (3p) Determinaţi partea întreagă a numărului $a=\dfrac{\sqrt{3}-81}{\sqrt{3}+\sqrt{3^2}+\sqrt{3^3}+...+\sqrt{3^7}}$.

Prof. Brutaru Tamara

b) (4p) Arătaţi că $\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{6+\sqrt{6}}+\sqrt{12+\sqrt{12}}+...+\sqrt{210+\sqrt{210}}<119$.

(***)

Soluție: a) Fie $S=\sqrt{3}+\sqrt{3^2}+\sqrt{3^3}+...+\sqrt{3^7}$.

Calculăm $S\cdot\sqrt{3}-S=\sqrt{3^2}+\sqrt{3^3}+...+\sqrt{3^8}-\left(\sqrt{3}+\sqrt{3^2}+\sqrt{3^3}+...+\sqrt{3^7}\right)$. Avem $S\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{3^8}-\sqrt{3}$, de unde $S=\dfrac{3^4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$. Deci, $a=\left(\sqrt{3}-81\right):\dfrac{3^4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\Leftrightarrow a=\left(\sqrt{3}-81\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}-1}{81-\sqrt{3}}\Leftrightarrow a=1-\sqrt{3}$. Cum $-2<-\sqrt{3}<-1\Rightarrow -1<1-\sqrt{3}<0$, avem partea întreagă a numărului a este $[a]=-1$.

b) Fie $a=\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{6+\sqrt{6}}+\sqrt{12+\sqrt{12}}+...+\sqrt{210+\sqrt{210}}$. Avem $a=\sqrt{1\cdot2+\sqrt{1\cdot2}}+\sqrt{2\cdot3+\sqrt{2\cdot3}}+\sqrt{3\cdot4+\sqrt{3\cdot4}}+...+\sqrt{14\cdot15+\sqrt{14\cdot15}}$. Cum $\sqrt{n\cdot(n+1)}<\sqrt{(n+1)^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, rezultă $a<\sqrt{1\cdot2+\sqrt{2^2}}+\sqrt{2\cdot3+\sqrt{3^2}}+\sqrt{3\cdot4+\sqrt{4^2}}+...+\sqrt{14\cdot15+\sqrt{15^2}}$. Deci

$a<\sqrt{1\cdot2+2}+\sqrt{2\cdot3+3}+\sqrt{3\cdot4+4}+...+\sqrt{14\cdot15+15}\Leftrightarrow a<\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{16}+...+\sqrt{225}$

$\Leftrightarrow a<2+3+4+...+15\Leftrightarrow a<\dfrac{15\cdot16}{2}-1\Leftrightarrow a<119$.

Barem:

a) Fie $S=\sqrt{3}+\sqrt{3^2}+\sqrt{3^3}+...+\sqrt{3^7}$. Calculăm: $S\cdot\sqrt{3}-S=\sqrt{3^2}+\sqrt{3^3}+...+\sqrt{3^8}-\left(\sqrt{3}+\sqrt{3^2}+\sqrt{3^3}+...+\sqrt{3^7}\right)$ $S\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{3^8}-\sqrt{3}\Leftrightarrow S=\dfrac{3^4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$	**1 p**
$a=\left(\sqrt{3}-81\right):\dfrac{3^4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\Leftrightarrow a=1-\sqrt{3}$	**1 p**
$-2<-\sqrt{3}<-1\Rightarrow -1<1-\sqrt{3}<0\Rightarrow [a]=-1$	**1 p**
b) Fie $a=\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{6+\sqrt{6}}+\sqrt{12+\sqrt{12}}+...+\sqrt{210+\sqrt{210}}$. $a=\sqrt{1\cdot2+\sqrt{1\cdot2}}+\sqrt{2\cdot3+\sqrt{2\cdot3}}+\sqrt{3\cdot4+\sqrt{3\cdot4}}+...+\sqrt{14\cdot15+\sqrt{14\cdot15}}$	**1 p**
$a<\sqrt{1\cdot2+\sqrt{2^2}}+\sqrt{2\cdot3+\sqrt{3^2}}+\sqrt{3\cdot4+\sqrt{4^2}}+...+\sqrt{14\cdot15+\sqrt{15^2}}$	**1 p**
$a<\sqrt{1\cdot2+2}+\sqrt{2\cdot3+3}+\sqrt{3\cdot4+4}+...+\sqrt{14\cdot15+15}\Leftrightarrow a<\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{16}+...+\sqrt{225}$ $\Leftrightarrow a<2+3+4+...+15$	**1 p**
$a<\dfrac{15\cdot16}{2}-1\Leftrightarrow a<119$	**1 p**

2. a) (4p) Fie $x\neq-1, y\neq-2, z\neq-3$ numere raţionale, astfel încât $\dfrac{2015}{x+1}+\dfrac{2015}{y+2}+\dfrac{2015}{z+3}=2014$. Calculaţi $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{y}{y+2}+\dfrac{z+1}{z+3}$.

Gazeta matematică Nr.10/2014

b) (3p) Fie $a=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+...+\dfrac{1}{2014}-\dfrac{1}{2015}$. Arătaţi că $a<1$.

(***)

Soluţie: **a)** $\frac{2015}{x+1}+\frac{2015}{y+2}+\frac{2015}{z+3}=2014 \Leftrightarrow 2015\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}\right)=2014$. Avem $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}=\frac{2014}{2015}$. Calculăm $\frac{x-1}{x+1}+\frac{y}{y+2}+\frac{z+1}{z+3}=\frac{x+1-2}{x+1}+\frac{y+2-2}{y+2}+\frac{z+3-2}{z+3}=$
$=1-\frac{2}{x+1}+1-\frac{2}{y+2}+1-\frac{2}{z+3}=3-2\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}\right)=3-2\cdot\frac{2014}{2015}=\frac{2017}{2015}$

b) Fie numărul raţional pozitiv $b=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}$. Calculăm $a+b=1-\frac{1}{2015}=\frac{2014}{2015}$. Cum $b>0 \Rightarrow a<a+b \Rightarrow a<\frac{2014}{2015}$, dar $\frac{2014}{2015}<1 \Rightarrow a<1$.

Barem:

a) $\frac{2015}{x+1}+\frac{2015}{y+2}+\frac{2015}{z+3}=2014 \Leftrightarrow 2015\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}\right)=2014$ $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}=\frac{2014}{2015}$	**1p**
$\frac{x-1}{x+1}+\frac{y}{y+2}+\frac{z+1}{z+3}=\frac{x+1-2}{x+1}+\frac{y+2-2}{y+2}+\frac{z+3-2}{z+3}==1-\frac{2}{x+1}+1-\frac{2}{y+2}+1-\frac{2}{z+3}$	**1 p**
$\frac{x-1}{x+1}+\frac{y}{y+2}+\frac{z+1}{z+3}=3-2\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}\right)$	**1 p**
$\frac{x-1}{x+1}+\frac{y}{y+2}+\frac{z+1}{z+3}=3-2\cdot\frac{2014}{2015}=\frac{2017}{2015}$	**1 p**
b) Fie $b=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}$, $b>0$	**1 p**
$a+b=1-\frac{1}{2015}=\frac{2014}{2015}$	**1 p**
$b>0 \Rightarrow a<a+b \Rightarrow a<\frac{2014}{2015}<1 \Rightarrow a<1$	**1 p**

3. Fie triunghiul oarecare ΔABC, N mijlocul $[AC]$, E simetricul lui B faţă de N şi P simetricul lui C faţă de B. Dacă dreapta PE intersectează laturile $[AB]$ şi $[AC]$ în punctele M, respectiv F, calculaţi raportul $\frac{FM}{MP}$.

Prof. Ispăşoiu Dorel

Soluţie: Cum N mijlocul $[AC] \Rightarrow [AN]\equiv[NC](1)$, iar $E=sim_N B \Rightarrow B-N-E$ coliniare şi $[BN]\equiv[NE](2)$. Din (1) şi (2) avem $ABCE$ paralelogram$\Rightarrow AE \parallel BC$, $[AE]\equiv[BC](3)$. Cum $P=sim_B C \Rightarrow P-B-C$ coliniare şi $[PB]\equiv[BC](4)$. Din (3) şi (4) $\Rightarrow [AE]\equiv[PB]$ şi cum $AE \parallel PB$ avem $AEBP$ paralelogram $\Rightarrow [AM]\equiv[MB],[PM]\equiv[ME]$ (5). Deci, EM şi AN sunt mediane în ΔABE, $AN\cap EM=\{F\} \Rightarrow F$ este centru de greutate în $\Delta ABE \Rightarrow \frac{FM}{ME}=\frac{1}{3}$. Din (5) $\Rightarrow \frac{FM}{MP}=\frac{1}{3}$.

Barem:

Figura	**1 p**
N mijlocul $[AC] \Rightarrow [AN]\equiv[NC](1)$; $E=sim_N B \Rightarrow B-N-E$ coliniare şi $[BN]\equiv[NE](2)$ Din (1) şi (2) avem $ABCE$ paralelogram.	**1 p**

$ABCE$ paralelogram $\Rightarrow AE \parallel BC, [AE] \equiv [BC] (3)$; $P = sim_B C \Rightarrow P - B - C$ coliniare şi $[PB] \equiv [BC] (4)$. Din (3) şi (4) $\Rightarrow [AE] \equiv [PB]$ şi cum $AE \parallel PB$ avem $AEBP$ paralelogram.	**1 p**
$AEBP$ paralelogram $\Rightarrow [AM] \equiv [MB], [PM] \equiv [ME]$ (5)	**1 p**
EM şi AN sunt mediane în ΔABE, $AN \cap EM = \{F\} \Rightarrow F$ este centru de greutate în ΔABE	**1 p**
F este centru de greutate în $\Delta ABE \Rightarrow \frac{FM}{ME} = \frac{1}{3}$	**1 p**
Din (5) $\Rightarrow \frac{FM}{MP} = \frac{1}{3}$.	**1 p**

4. În triunghiul dreptunghic ΔABC, M este mijlocul ipotenuzei $[BC]$, $[BP$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABM$, $P \in AM$, iar $[AQ$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle CAM$, $Q \in BC$. Demonstraţi că dreptele BP şi AQ sunt perpendiculare dacă şi numai dacă triunghiul ΔABC este isoscel.

Gazeta Matematică Nr.6/2011

<u>Soluţie</u>: Demonstrăm că dacă $BP \perp AQ$, atunci ΔABC este isoscel. Notăm $m(\sphericalangle MAC) = 2a, m(\sphericalangle MAB) = 2b$. Avem $2a + 2b = 90^\circ$ (1). Din AM mediană în $\Delta ABC \Rightarrow \Delta AMB$ isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle MAB) = m(\sphericalangle MBA) = 2b$ şi cum $[BP$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABM \Rightarrow m(\sphericalangle PBA) = b.$ Dacă $BP \cap AQ = \{T\}$, atunci din triunghiul dreptunghic ΔABT deducem că $a + 3b = 90^\circ$ (2). Din (1) şi (2) obţinem $2b = 45^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle MBA) = 45^\circ$, deci ΔABC este dreptunghic isoscel.

Demonstrăm acum că dacă ΔABC este isoscel, atunci $BP \perp AQ$. Din teorema bisectoarei în ΔABM avem $\frac{AP}{PM} = \frac{AB}{BM}$ (3). Tot cu teorema bisectoarei în ΔACM avem $\frac{CQ}{QM} = \frac{AC}{AM}$ (4). Dar $AB = AC, BM = AM$ şi atunci din (3) şi (4) $\Rightarrow \frac{AP}{PM} = \frac{CQ}{QM}$. De aici, aplicând teotema reciprocă a teoremei lui Thales în $\Delta AMC \Rightarrow PQ \parallel AC$. Cum $AC \perp AB \Rightarrow PQ \perp AB$. Cum AM este mediană în triunghiul isoscel $\Delta ABC \Rightarrow AM \perp BC$. În ΔABQ avem AM şi QP înălţimi, de unde rezultă că P este ortocentrul triunghiului ΔABQ. În concluzie, $BP \perp AQ$.

<u>Barem:</u>

Demonstrăm că dacă $BP \perp AQ$, atunci ΔABC este isoscel. Notăm $m(\sphericalangle MAC) = 2a, m(\sphericalangle MAB) = 2b$. Avem $2a + 2b = 90^\circ$ (1). Din AM mediană în $\Delta ABC \Rightarrow \Delta AMB$ isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle MAB) = m(\sphericalangle MBA) = 2b$ şi cum $[BP$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABM \Rightarrow m(\sphericalangle PBA) = b.$	**1 p**
Dacă $BP \cap AQ = \{T\}$, atunci din triunghiul dreptunghic ΔABT deducem că $a + 3b = 90^\circ$ (2).	**1 p**
Din (1) şi (2) obţinem $2b = 45^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle MBA) = 45^\circ$, deci ΔABC este dreptunghic isoscel.	**1 p**
Demonstrăm acum că dacă ΔABC este isoscel, atunci $BP \perp AQ$. Din teorema bisectoarei în ΔABM avem $\frac{AP}{PM} = \frac{AB}{BM}$ (3). Tot cu teorema bisectoarei în ΔACM avem $\frac{CQ}{QM} = \frac{AC}{AM}$ (4).	**1 p**
$AB = AC, BM = AM$ şi atunci din (3) şi (4) $\Rightarrow \frac{AP}{PM} = \frac{CQ}{QM}$ şi aplicând teotema reciprocă a teoremei lui Thales în $\Delta AMC \Rightarrow PQ \parallel AC$.	**1 p**
Cum $PQ \parallel AC$, $AC \perp AB \Rightarrow PQ \perp AB$. Cum AM este mediană în triunghiul isoscel $\Delta ABC \Rightarrow AM \perp BC$.	**1 p**
În ΔABQ avem AM şi QP înălţimi, de unde rezultă că P este ortocentrul triunghiului $\Delta ABQ \Rightarrow BP \perp AQ$.	**1 p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.